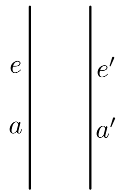
Закон Кирхгофа



- Слева излучилось e (в единицу времени с единицы площади)
- Справа поглотилось ea'
  отразилось налево $e(1-a')$
- Слева поглотилось $ea(1-a')$
  отразилось направо $e(1-a)(1-a')$
- Справо поглотилось $ea'(1-a)(1-a')$
  отразилось налево $e(1-a)(1-a')^2$
- Слева поглотилось $ea(1-a)(1-a')^2$
  отразилось направо $e(1-a)^2(1-a')^2$
- Справа поглотилось $ea'(1-a)^2(1-a')^2$
  $\ldots$

Передалось слева направо

$$ea'\left[1+(1-a)(1-a')+(1-a)^2(1-a')^2+\cdots\right]=\frac{ea'}{1-(1-a)(1-a')}$$

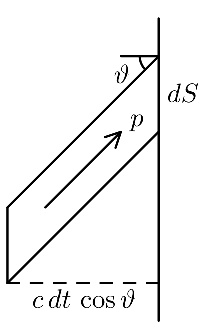
$$\frac{ea'}{1-(1-a)(1-a')}=\frac{a'a}{1-(1-a)(1-a')}$$
$$\frac{e}{a}=\frac{e'}{a'}$$

Фильтр, интервал $d\omega$

$$\frac{e_\omega}{a_\omega}=\frac{e'_\omega}{a'_\omega}$$

Абсолютно чёрное тело $a=1$

Равновесное излучение



импульс $dP_x = \frac{1}{c} u \frac{d\Omega}{4\pi} dS\, c\, dt\, \cos^2\vartheta$

давление $p = 2u \int \cos^2\vartheta \frac{d\Omega}{4\pi}$ по полусфере

плотность энергии $u = 2u \int \frac{d\Omega}{4\pi}$

$$\frac{p}{u} = \frac{\int_0^1 \cos^2\vartheta\, d\cos\vartheta}{\int_0^1 d\cos\vartheta} = \frac{1}{3}$$

поглощённая энергия $B\, dS\, dt = u \frac{d\Omega}{4\pi} dS\, c\, dt\, \cos\vartheta$

$$\frac{e}{u} = \frac{c}{2} \frac{\int_0^1 \cos\vartheta\, d\cos\vartheta}{\int_0^1 d\cos\vartheta} = \frac{c}{4}$$

спектральное распределение $u(T) = \int_0^\infty w(T,\omega)\, d\omega$

Закон Штефана–Больцмана

$$U = u(T)V \qquad p = \tfrac{1}{3}u$$
$$dU = T\, dS - p\, dV$$
$$dS = \frac{dU + p\, dV}{T} = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p\, dV\right]$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] = \frac{u + \frac{1}{3}u}{T} = \frac{4}{3}\frac{u}{T}$$
$$\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{du}{dT}$$
$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3}\frac{d}{dT}\frac{u}{T}$$
$$\frac{1}{T}\frac{du}{dT} = \frac{4}{3}\frac{d}{dT}\frac{u}{T} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{T}\frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2}\right)$$
$$\frac{du}{dT} = 4\frac{u}{T}$$
$$u = \sigma T^4$$

Закон смещения Вина

Адиабата

$$dU + p\, dV = 0$$
$$V\frac{du}{dT}dT + u\, dV + \tfrac{1}{3}u\, dV = V\frac{du}{dT}dT + \tfrac{4}{3}u\, dV = 0$$
$$\frac{du}{u} = -\frac{4}{3}\frac{dV}{V} \qquad \frac{dT}{T} + \frac{1}{3}\frac{dV}{V} = 0$$
$$uV^{4/3} = \text{const} \quad TV^{1/3} = \text{const}$$

Для интервала $d\omega$

$$\frac{V'}{V} = 1 + 3\alpha \quad \frac{\omega'}{\omega} = 1 - \alpha \quad \frac{T'}{T} = 1 - \alpha$$
$$\frac{w(T', \omega')\, d\omega'}{w(T, \omega)\, d\omega} = 1 - 4\alpha$$
$$w(T(1-\alpha), \omega(1-\alpha)) = (1 - 3\alpha) w(T, \omega) \quad w(\lambda T, \lambda\omega) = \lambda^3 w(T, \omega)$$
$$w(T, \omega) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) = T^3 g\left(\frac{\omega}{T}\right)$$
$$u(T) = \int_0^\infty w(T, \omega)\, d\omega = T^4 \int_0^\infty g(x)\, dx$$

Распределение Рэлея–Джинса

В классической физике по размерности

$$w(T, \omega) \sim \frac{\omega^2 T}{c^3}$$

так что $u = \infty$.

Число собственных мод

$$V\nu(\omega)\, d\omega = 2\frac{V d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = 2\frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi)^3 c^3} \quad \nu(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

По теореме о равнораспределении $E = T$

$$w(T, \omega) = \nu(\omega) E(T, \omega) = \frac{\omega^2 T}{\pi^2 c^3}$$

Удовлетворяет закону Вина

Распределение Вина

$$w(T, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/T}$$

Удовлетворяет закону Вина. Распределение Больцмана для фотонов.

Макс Планк

1858 родился в Киле

1867 переезд в Мюнхен, Максимилиановская гимназия

1874 Мюнхенский университет
проф. Джолли
— Молодой человек, зачем Вы хотите испортить себе жизнь? Теоретическая физика в основном закончена. Остались отдельные частные задачи, которые можно решать.

1877 Берлинский университет. Гельмгольц, Кирхгоф.

1878 Мюнхенский университет, диссертация

1880 хабилитация, приват-доцент

1885 Кильский университет, экстраординарный профессор

1889 Берлинский университет (преемник Кирхгофа), с 1892 ординарный профессор и директор института теоретической физики

1900 распределение Планка

1911 первый Сольвеевский конгресс

1918 Нобелевская премия

1947 умер в Гёттингене

История

Имперский физико-технический институт в Берлине. Луммер и Прингсхайм, Рубенс и Курльбаум.

Полость с зеркальными стенками, в ней осцилляторы. Электродинамический вывод $w(T,\omega) = \nu(\omega)E(T,\omega)$. Кинетическое уравнение, возрастание энтропии. Критика Больцмана, естественное излучение.

$$
\begin{aligned}
&S = -\frac{E}{E_0}\left(\log\frac{E}{E_0} - 1\right) \\
&\frac{dS}{dE} = -\frac{1}{E_0}\log\frac{E}{E_0} = \frac{1}{T} \quad \frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E_0 E} \\
&E = E_0 e^{-E_0/T} \quad w(T,\omega) = \frac{\omega^2 E_0}{\pi^2 c^3} e^{-E_0/T}
\end{aligned}
$$

Удовлетворяет закону Вина при $E_0 = \hbar\omega$, получается распределение Вина. Планк думал, что эта формула для энтропии — единственная, дающая рост энтропии. Неверно.

Октябрь 1900 — Рубенс, Курльбаум: не соответствуют в инфракрасной области. При $\hbar\omega \ll T$

$$
\begin{aligned}
&S = \log\frac{E}{E_0} + 1 \\
&\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E} = \frac{1}{T} \quad \frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E^2} \\
&E = T \quad w(T,\omega) = \frac{\omega^2 T}{\pi^2 c^3}
\end{aligned}
$$

Интерпрляция

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E(E+E_0)} \\
&\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E_0}\log\left(1 + \frac{E_0}{E}\right) = \frac{1}{T} \\
&E = \frac{E_0}{e^{E_0/T} - 1} \quad w(T,\omega) = \frac{\omega^2 E_0}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{E_0/T} - 1} \quad E_0 = \hbar\omega
\end{aligned}
$$

соответствует экспериментальным данным.

$$
\begin{aligned}
&u = \frac{T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \sigma T^4 \\
&\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty x^3(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots)\,dx = 3!\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = 3!\frac{\pi^4}{90} \\
&\sigma = \frac{\pi^2}{15 c^3 \hbar^3}
\end{aligned}
$$

Декабрь 1900 — n квантов энергии $E_0 = \hbar\omega$ распределяем по N осцилляторам, формула Больцмана для энтропии

$$W = \frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!}$$
$$NS = \log W \quad S = \left(\frac{E}{E_0}+1\right)\log\left(\frac{E}{E_0}+1\right) - \frac{E}{E_0}\log\frac{E}{E_0}$$
$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E_0}\log\left(1+\frac{E_0}{E}\right) \qquad \frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E(E+E_0)}$$

Если не полагать $k=1$, то $S = k\log W$,

$$w(T,\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

Из эксперимента $\hbar$, k. $R = kN_A \Rightarrow$ число Авогадро $N_A \Rightarrow$ массы атомов, элементарный заряд.

Сравнение

Рэлей–Джинс классич. волны	Планк квант. волны = тождеств. частицы	Вин классич. частицы (различимые)
$W = \frac{n^N}{N!} \quad (N \gg n)$	$W = \frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!}$	$W = \frac{N^n}{n!} \quad (n \gg N)$
$S = \log\frac{E}{E_0}+1$	$S = \left(\frac{E}{E_0}+1\right)\log\left(\frac{E}{E_0}+1\right) - \frac{E}{E_0}\log\frac{E}{E_0}$	$S = -\frac{E}{E_0}\left(\log\frac{E}{E_0}-1\right)$
$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E} = \frac{1}{T}$	$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E_0}\log\left(1+\frac{E_0}{E}\right) = \frac{1}{T}$	$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{E_0}\log\frac{E_0}{E} = \frac{1}{T}$
$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E^2}$	$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E(E+E_0)}$	$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{1}{E_0E}$
$E = T$	$E = \frac{E_0}{e^{E_0/T}-1}$	$E = E_0e^{-E_0/T}$
$w = \frac{\omega^2T}{\pi^2c^3}$	$w = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}$	$w = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}e^{-\hbar\omega/T}$

Эйнштейн: флуктуации

$$W \sim e^S \sim \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2S}{dE^2}\delta E^2\right)$$
$$\overline{\delta E^2} = -\left(\frac{d^2S}{dE^2}\right)^{-1} = E(E+\hbar\omega)$$

Для объёма V и интервала $d\omega$

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega}-1}\left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega}-1}+\hbar\omega\right)V\nu(\omega)\,d\omega$$

Альберт Эйнштейн

1879 Ульм

1880 Мюнхен
Отец с братом — фирма, торгующая электрическим оборудованием

Католическая школа, разочарование в религии
Гимназия — не из лучших учеников, авторитарные учителя, требуют зубрёжки
Скрипка

1894 Родители переехали в Италию

1895 Неудачная попытка поступить в Цюрихский политехнический институт

1896 Поступил. Сокурсники — Гроссман, Милева Марич

1900 Сдал выпускные экзамены (не блестяще)
Случайные заработки — учителем в школах
Гражданство Швейцарии

1902 Берн, патентное бюро, технический эксперт 3 класса

1903 Женился на Милеве Марич. Добрачная дочь Лизерль (неизвестно, куда делась, вероятно, умерла в 1–2 года).

1905 3 знаменитых статьи — теория относительности; кванты света; броуновское дви́дение

1906 Технический эксперт 2 класса

1909 Экстраординарный профессор, Цюрих

1911 Профессор, Прага
А там гуляют психи, которые **не** занимаются квантовой теорией

1912 Профессор, Цюрих

1913 Профессор, Берлин (без обязанности читать лекции)
Планк: гипотезу световых квантов вряд ли стоит ставить ему в вину

1915 ОТО

1919 Экспедиция ддингтона в Бразилию, солнечное затмение — подтверждение ОТО

1922 Нобелевская премия (за фотоэффект)
Если волна — германскому правительству следует запретить фотоэлементы, а если частица, то дифракционные решётки

Гипотеза световых квантов

Эйнштейн (1905) — "эвристическая точка зрения". Газ

$$S(V) - S(V_0) = \log\left(\frac{V}{V_0}\right)^N$$

Излучение по Вину

$$S(V) - S(V_0) = \log\left(\frac{V}{V_0}\right)^{E/(\hbar\omega)}$$

Фотоэффект

$$E_{\max} = \hbar\omega - E_0$$

не зависит от интенсивности света. Экспериментально подтвердил Милликен (1916).

Фотолюминисценция — правило Стокса $\omega' \le \omega$.

Теплоёмкости

Известные проблемы — вращательные степени свободы, электроны в металлах.

Твёрдые тела — закон Дюлонга–Пти, на 1 атом

$$E = 3T \qquad c = 3$$

У алмаза при комнатной T меньше. У всех твёрдых тел уменьшается при низких T.

Эйнштейн (1907)

$$E = 3\frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/T} - 1}$$

Экспериментальные проверки. При очень низких T не согласуется.

Дебай (1912)

$$\nu(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 c_s^3} \Rightarrow \frac{\omega^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{c_{||}^3} + \frac{2}{c_\perp^3}\right)$$

$$\int_0^{\omega_D} \nu(\omega)\, d\omega = \frac{\omega_D^3}{2\pi^2 c_s^3} = 3n \qquad \lambda \sim n^{-1/3}$$

$$\varepsilon = \int_0^{\omega_D} \nu(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\, d\omega$$

$$T \ll T_D = \hbar\omega_D : \qquad \varepsilon \sim T^4 \qquad c \sim T^3$$

$$T \gg T_D : \qquad \varepsilon = 3nT$$

Борн–Карман (на несколько дней позже): детальная теория колебаний кристаллической решётки.