Хайзенберг

Зима 1924–25: Копенгаген, весной вернулся в Германию. Бор стал сомневаться в моделях многоэлектронных атомов. Хайзенберг занялся интенсивностями спектральных линий водорода. Математические сложности. Переключился на слабо нелинейный осциллятор. Идея применить методы Борна и Крамерса прямо к кинематике. Июнь: сенная лихорадка, 10 дней на острове Гельголанд. По пути назад обсудил с Паули. В Гёттингене написал статью и послал Паули. Паули одобрил, Борн послал в печать.

О квантовотеоретическом истолновании кинематических и механических соотношений (июль). Только соотношения между величинами, которые являются в принципе наблюдаемыми. Орбиты и орбитальные частоты ненаблюдаемы, наблюдаемы только частоты и интенсивности спектральных линий. Влияние статьи Эйнштейна по теории относительности. Не заниматься догадками для каждой конкретной задачи (как Крамерс), а один раз угадать теорию, с помощью которой можно решать все задачи.

Классика	Квантовая механика
$l\omega(n)$	$\omega_{n'n} = \dfrac{E_n - E_{n'}}{\hbar}$, $n' = n - l$
$l\dfrac{dF(n)}{dn}$	$F(n) - F(n')$
$l\dfrac{\partial F(n,l)}{\partial l}$	$F(n+l,n) - F(n,n-l)$
$x(t) = \sum\limits_l x_l e^{-il\omega t}$	$x_{n'n} e^{-i\omega_{n'n} t}$
$x_{-l} = x_l^*$	$x_{nn'} = x_{n'n}^*$
$\dot{x}(t) = \sum\limits_l (-il\omega) x_l e^{-il\omega t}$	$\dot{x}_{n'n} = -i\omega_{n'n} x_{n'n}$
$x(t)y(t) = \sum\limits_{l,l'} x_l y_{l'} e^{-i(l+l')\omega t}$	$(xy)_{n'n} e^{-i\omega_{n'n} t} = \sum\limits_{n''} x_{n'n''} e^{-i\omega_{n'n''} t} y_{n''n} e^{-i\omega_{n''n} t}$
	$(xy)_{n'n} = \sum\limits_{n''} x_{n'n''} y_{n''n}$

Правило квантования

$$m \oint \dot{x}^2 dt = m \sum_{l,l'} x_l x_{l'}^* (-i\omega l) i\omega l' \oint e^{-i(l-l')\omega t} dt = 2\pi m \sum_l l^2 \omega |x_l|^2 = 2\pi\hbar n$$

$$m \sum_l l \frac{d}{dn} l\omega |x_l|^2 = \hbar$$

Подстановка Борна–Крамерса

$$m \sum_l \left(\omega_{n,n+l} |x_{n,n+l}|^2 - \omega_{n-l,n} |x_{n,n-l}|^2 \right) = \hbar$$

$$2m \left(\sum_{n'>n} \omega_{nn'} |x_{nn'}|^2 - \sum_{n'<n} \omega_{n'n} |x_{n'n}|^2 \right) = \hbar$$

Излучение

$$I_l = \frac{2e^2}{3c^3} (l\omega)^4 \overline{|x_l \cdot 2\cos l\omega t|^2} = \frac{4e^2}{3c^3} (l\omega)^4 |x_l|^2$$

$$\hbar\omega_{n-l,n} A_{n-l,n} = \frac{4e^2}{3c^3} \omega_{n-l,n}^4 |x_{n-l,n}|^2$$

$$A_{n'n} = \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \omega_{n-l,n}^3 |x_{n-l,n}|^2 \qquad f_{n'n} = \frac{3mc^3}{2e^2} \frac{A_{n'n}}{\omega_{n'n}^2} = \frac{2m}{\hbar} \omega_{n'n} |x_{n-l,n}|^2$$

$$\sum_{n'>n} f_{nn'} - \sum_{n'<n} f_{n'n} = 1$$

Гармонический осциллятор, ангармонический осциллятор в 1 порядке теории возмущений, ротатор.

Макс Борн

1882 Бреслау. Отец — профессор анатомии. В гимназии увлекался физикой.

1901 Университет Бреслау: математика, астрономия.

1902 Университет Хайдельберг. Подружился с Франком.

1903 Цюрих политехникум. Университет Гёттинген. Лекции Гильберта, Минковского. Ассистент Гильберта. Теория относительности.

1907 Диссертация по теории упругости (Клейн). Экзамен по астрономии (Шварцшильд): что Вы делаете, когда видите падающую звезду? Полгода в Кембридже: Томсон, Лармор.

1908 Гёттинген, Минковский (умер в начале 1909). Приват-доцент. С фон Карманом — теория кристаллической решётки.

1914 Берлин, экстраординарный профессор. Военные работы: определение положения пушки по времени регистрации звука в нескольких местах. Дружба с Эйнштейном. Играл на рояле.

1919 Франкфурт, ординарный профессор. Ассистент — Штерн.

1921 Сменил Дебая — директор физического института Гёттингенского университета. Паули, Хайзенберг, Йордан, Хунд.

1933 Эмиграция. Временная работа в Кембридже. Полгода в Индии.

1936 Эдинбург.

1953 Вышел на пенсию, вернулся в Германию.

Борн, Йордан

Сентябрь.

Борн понял, что умножение Хайзенберга матричное. Встретил Паули в поезде и предложил ему совместно поработать в этом направлении. Паули отказался: я знаю, что Вам нравятся сложные трудоёмкие вычисления; Вы только испортите физические идеи Хайзенберга своей бесплодной математикой. Йордан хорошо знал матрицы (помогал Куранту в издании его книги с Гильбертом) и стал соавтором Борна.

Борн

$$
\begin{aligned}
& m\sum_{n'}\left(\omega_{nn'}x_{nn'}x_{n'n}-\omega_{n'n}x_{n'n}x_{nn'}\right)=\hbar \\
& im\sum_{n'}\left(\dot{x}_{nn'}x_{n'n}-x_{nn'}\dot{x}_{n'n}\right)=\hbar \\
& (px-xp)_{nn}=-i\hbar \qquad px-xp=-i\hbar\,?
\end{aligned}
$$

Йордан

$$
\begin{aligned}
& \dot{p}=F(x) \\
& \frac{d}{dt}(px-xp)=\dot{p}x+p\dot{x}-\dot{x}p-x\dot{p}=F(x)x+\frac{p^2}{m}-\frac{p^2}{m}-xF(x)=0
\end{aligned}
$$

Борн–Йордан

$$\begin{aligned}
&[p, f(x)] = -i\hbar f'(x)\\
&[x, f(p)] = i\hbar f'(p)\\
&\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}[H, p]\\
&\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{i}{\hbar}[H, x]\\
&\dot{f} = \frac{i}{\hbar}[H, f]\\
&\dot{f}_{n'n} = \frac{i}{\hbar}\left(H_{n'n'}f_{n'n} - f_{n'n}H_{nn}\right) = i\frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}f_{n'n} = -i\omega_{n'n}f_{n'n}\\
&\dot{H} = 0
\end{aligned}$$

Осциллятор

$$\begin{aligned}
&H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \left(\omega^2 - \omega_{n'n}^2\right)x_{n'n} = 0\\
&x_{n'n} \neq 0 \;\Rightarrow\; \omega_{n'n} = \pm\omega \qquad p_{n'n} = -im\omega_{n'n}x_{n'n}\\
&[p, x]_{nn} = -i\hbar = \sum_{n'}\left(p_{nn'}x_{n'n} - x_{nn'}p_{n'n}\right) = \sum_{n'}\left(-im\omega_{nn'}|x_{n'n}|^2 + im\omega_{n'n}|x_{n'n}|^2\right)\\
&\qquad = 2\left(-im\omega|x_{n+1,n}|^2 + im\omega|x_{n-1,n}|^2\right) = -i\hbar\\
&|x_{n+1,n}|^2 - |x_{n,n-1}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \qquad |x_{10}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\\
&|x_{n,n-1}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}n \qquad x_{n,n-1} = x_{n-1,n} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}n}\\
&x_{n,n+1} = x_{n+1,n} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(n+1)}\\
&E_n = H_{nn} = \frac{1}{2m}\left(p_{n,n-1}p_{n-1,n} + p_{n,n+1}p_{n+1,n}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x_{n,n-1}x_{n-1,n} + x_{n,n+1}x_{n+1,n}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Детальные вычисления делал в основном Йордан. Кратко рассмотрено квантование электромагнитного поля.

Хайзенберг, Борн, Йордан

Ноябрь. Полное и систематическое изложение квантовой механики. Канонические преобразования

$$\begin{aligned}
&[p_0, q_0] = -i\hbar \qquad [p, q] = -i\hbar\\
&p = Sp_0S^{-1} \qquad q = Sq_0S^{-1}\\
&H(p, q) = SH(p_0, q_0)S^{-1} = E \quad \text{диагональная}
\end{aligned}$$

Теория возмущений

$$
\begin{aligned}
&H = H_0 + \lambda H_1 + \cdots \qquad S = 1 + \lambda S_1 + \cdots \qquad S^{-1} = 1 - \lambda S_1 + \cdots \\
&(1 + \lambda S_1)(H_0 + \lambda H_1)(1 - \lambda S_1) = E_0 + \lambda E_1 \\
&\lambda^0: \quad H_0 = E_0 \\
&\lambda^1: \quad H_1 + S_1 H_0 - H_0 S_1 = E_1 \\
&n' = n: \quad E_{1n} = H_{1nn} + S_{1nn} E_{0n} - E_{0n} S_{1nn} = H_{1nn} \\
&n' \neq n: \quad 0 = H_{1nn'} + S_{1nn'} E_{0n'} - E_{0n} S_{1nn'} \qquad S_{1nn'} = \frac{H_{1nn'}}{E_{0n} - E_{0n'}} \\
&q_1 = S_1 q_0 - q_0 S_1 \qquad p_1 = S_1 p_0 - p_0 S_1
\end{aligned}
$$

Это формула Крамерса при $\omega \to 0$. Нестационарная теория возмущений даёт полную формулу Крамерса. Теория возмущений при наличии вырождения

$$S = S_0(1 + \lambda S_1 + \cdots)$$

S_0 — правильное нулевое приближение. Теорема вириала

$$\sum x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = nU \qquad \frac{d}{dt} \sum p_i q_i = \sum (\dot{p}_i q_i + p_i \dot{q}_i) = 2E_k - nU$$

- Дискретный и непрерывный спектр.
- Угловой момент. Правила отбора.
- Квантование волнового поля (Йордан)

Нелинейный осциллятор, ротатор. Хайзенберг, Йордан: аномальный эффект Зеемана (включая интенсивности спектральных линий). Вращательные и колебательные спектрв молекул (аспирантка Ленца Люси Мензинг).

Паули

Решил задачу об атоме водорода (1926) с помощью вектора Германа–Бернулли–Лапласа–Рунге–Ленца–Гамильтона–Гиббса

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \qquad \vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + m\alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

Поль Дирак

1902 Бристоль. Отец из Швейцарии, преподавал французский в коммерческом училище и техническом колледже Бристоля. Мать, дочь капитана торгового судна, работала в библиотеке. Отец требовал, чтобы дома все разговаривали по-французски. Полю это было трудно, и он предпочитал молчать.

1914 Средняя школа технического колледжа — практическая и техническая направленность.

1918 Инженерный факультет Бристольского университета. Любимый предмет — математика. Увлечение теорией относительности.

1921 Бакалавр электротехники. Не смог найти работу. Не смог продолжить обучение в Кембриджском университете. Неофициально посещал занятия на математическом факультете Бристольского университета.

1923 Экзамен с отличием 1 степени. Получил грант. Аспирантура Кембриджского университета, колледж святого Иоанна. Лекции по статистической механике, электродинамике; изучил аналитическую механику. Руководитель — Фаулер, работы по статистической механикой, знакомство с атомной физикой.

1925 Хайзенберг делает доклад в клубе Капицы "Зоология термов и зеемановская ботаника"; вероятно, упоминает о своих новых идеях. Фаулер дал корректуру статьи Хайзенберга. Октябрь: во время прогулки — идея об аналогии между коммутаторами и скобками Пуассона. Воскресенье, библиотека закрыта. Только в понедельник посмотрел определение скобок Пуассона в учебнике. Попытки решить задачу об атоме водорода (не вполне успешные).

1926 Диссертация. Теория Шрёдингера — симметрия волновых функций тождественных частиц. Копенгаген, теория преобразований, бра и кет, δ функция. Теория излучения.

1927 Гёттинген. Сольвеевский конгресс. Уравнение Дирака.

1929 Лекции в США; пересёк Тихий океан с Хайзенбергом, лекции в Японии; транссиб.

1930 Принципы квантовой механики.

1932 Лукасовский профессор (сменил Лармора; Ньютон, Хокинг).

1933 Нобелевская премия.

Физические законы должны обладать математической красотой. Игра с уравнениями. Бог — математик высочайшего уровня.

Тщательно продумывал в уме, писал ясно и кратко, без исправлений. На лекциях фактически дословно излагал свою книгу; когда студент просил что-то разъяснить, повторял ещё раз.

- -2 рыбы.
- Это утверждение, а не вопрос.
- В нечётном числе мест (Клейн–Нишина).
- Не начинать предложения, не зная, как его закончить (Бор).
- Оптимальное расстояние до женского лица.
- Паули: Бога нет, и Дирак пророк его.
- Баночка с таблетками.
- Очень ветрено сегодня.
- Привидение: полночь по Гринвичу.

Интервью в США:

Я постучал в дверь.
— Войдите,
сказал профессор Дирак. Это было наиболее длинное его высказывание за время интервью.
— Профессор, я заметил, что перед Вашей фамилией стоит куча букв. Они что-нибудь означают?
— Нет.
— То есть я могу написать что угодно?
— Да.
— Будет ли всё OK, если я напишу Пуанкаре Алоизиус Муссолини?
— Да.

— Мы замечательно продвигаемся. Не расскажете ли в двух словах, чем Вы занимаетесь?
— Нет.
— Хорошо. Будет ли всё в порядке, если я напишу, что профессор Дирак решил все проблемы математической физики, но не может найти, как предсказать результативность какого-то бейсбольного игрока?
— Да.
— Что Вам больше всего понравилось в Америке?
— Картошка.
— Мне тоже. Какой Ваш любимый спорт?
— Китайские шахматы.
Это меня ошарашило — что-то новенькое.
— Вы ходите в кино?
— Да.
— Когда?
— В 1920, может быть ещё в 1930.
— Любите ли Вы читать комиксы по воскресеньям?
— Да.
— Это показывает, что мы больше похожи, чем я думал. Говорят, что Вы и Эйнштейн — единственные два настоящих высоколобых, и единственные, кто действительно может понимать друг друга. Я не буду спрашивать, так ли это, потому что знаю, что Вы слишком скромны, чтобы это признать. Но я хочу узнать, встречался ли Вам парень, которого даже Вы не понимаете?
— Да.
— И кто же это?
— Вейль.
Тут наше интервью неожиданно завершилось. Если этот профессор Вейль когда-нибудь приедет к нам, постараюсь его понять. Надо же иногда проверять свой интеллект.

Дирак

Классика

$$x(J,\varphi) = \sum_l x_l(J) e^{-il\varphi} \qquad y(J,\varphi) = \sum_l y_l(J) e^{-il\varphi}$$

Коммутатор

$$\begin{aligned}
&(xy - yx)_{n-l-m,n} = x_{n-l-m,n-l} y_{n-l,n} - y_{n-l-m,n-l} x_{n-l,n} \\
&= (x_{n-l-m,n-l} - x_{n-m,n}) y_{n-l,n} - (y_{n-l-m,n-m} - y_{n-l,n}) x_{n-m,n} \\
&\to -l \frac{\partial x_m(n)}{\partial n} y_l(n) + m \frac{\partial y_l(n)}{\partial n} x_m(n) = -\hbar \frac{\partial x_m}{\partial I} i \frac{\partial y_l}{\partial \varphi} + \hbar \frac{\partial y_l}{\partial I} i \frac{\partial x_m}{\partial \varphi} \\
&= -i\hbar \sum_{l+m=\mathrm{const}} \left(\frac{\partial x_m}{\partial I} \frac{\partial y_l}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_m}{\partial \varphi} \frac{\partial y_l}{\partial I} \right) = -i\hbar \left(\frac{\partial x}{\partial I} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial I} \right) \\
&[x,y] \to -i\hbar \{x,y\}
\end{aligned}$$