Модели атома

Модель Томсона (1906).

Резерфорд, Гейгер, Марсден (1909) рассеяние α частиц (сцинтилляции). Резерфорд предложил Марсдену посмотреть рассеяние назад.
— Это как если бы Вы выстрелили из пушки по листку папиросной бумаги, а снаряд отразился и поразил Вас.
Нобелевский лауреат слушает курс теории вероятности. Резерфорд (1911) — ввёл понятие сечения, посчитал классическое сечение рассеяния заряженной частицы в кулоновском поле.
— Теперь я знаю, как выглядит атом.

Трудности: излучение; в атомах с > 1 электроном нестабильность — один электрон проваливается глубже, другой вылетает. Что определяет радиус и энергию? Почему все атомы одного элемента одинаковы?

Спектры

Дискретные линии. Спектр Солнца — линии поглощения (Фраунхофер). Бунзен, Кирхгоф — спектральный анализ.

Бальмер — 60-летний учитель в школе для девочек в Базеле, увлекался нумерологией (геометрия иерусалимского храма, число ступеней в египетских пирамидах; однажды пожаловался знакомому физику, что у него больше нет чисел, чтобы анализировать, и тот посоветовал ему таблицы длин волн спектральных линий). 1885

$$\omega = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n \geq 3$$

Ридберг (1890–1900) спектры щелочных металлов

$$\omega = \text{const} - \frac{R}{(n+p)^2} \qquad \text{(principal)}$$
$$\omega = \text{const} - \frac{R}{(n+s)^2} \qquad \text{(sharp)}$$
$$\omega = \text{const} - \frac{R}{(n+d)^2} \qquad \text{(diffuse)}$$

Позже

$$\omega = R\left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(n+p)^2}\right) \qquad \text{(principal)}$$
$$\omega = R\left(\frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(n+s)^2}\right) \qquad \text{(sharp)}$$
$$\omega = R\left(\frac{1}{(2+p)^2} - \frac{1}{(n+d)^2}\right) \qquad \text{(diffuse)}$$

Комбинационный принцип Ритца (1908)

$$\omega_{nn'} = T_n - T_{n'}$$

Нильс Бор

1885 Копенгаген

Отец — Христиан, профессор физиологии
Мать — Эллен (Адлер), дочь банкира
Коллеги отца — философ Хёффдинг, физик Кристиансен, лингвист Томсен

1987 брат Харальд, известный математик
Футбол (Христиан — олимпиада 1908, 2 место)

1903 университет Копенгаген; философский кружок

1911 диссертация — электронная теория металлов, теорема Бора–ван Лёвен
грант фонда Карлсберга, Кавендиш Томсон, Манчестер Резерфорд
модель атома, правило смещения

1912 женился на Маргарет Норлунд

1913 Хансен сказал Бору о спектральных формулах. Как только увидел формулу Бальмера, всё стало ясно
Предварительную версию статьи послал Резерфорду. Он решил, что надо сократить.
Послал расширенную версию, поехал к Резерфорду.
Эйнштейн: высшая музыкальность в области мысли

1914 лектор, Манчестер до 1916

1916 профессор, Копенгаген

1921 институт теоретической физики

1922 Нобелевская премия

Атом водорода

- Существуют стационарные состояния с дискретными энергиями, в которых атом не излучает
- Атом излучает при переходе из более высокого стационарного состояния в более низкое

$$\hbar\omega_{n_1 n_2} = E_{n_1} - E_{n_2}$$

Круговая орбита

$$\frac{e^2}{r^2} = m\omega^2 r \qquad r = m^{-1/3} e^{2/3} \omega^{-2/3}$$
$$E = \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \tfrac{1}{2} m^{1/3} e^{4/3} \omega^{2/3} - m^{1/3} e^{4/3} \omega^{2/3} = -\tfrac{1}{2} m^{1/3} e^{4/3} \omega^{2/3}$$
$$\omega = \frac{(-2E)^{3/2}}{m^{1/2} e^2}$$

Предположим

$$E_n = -\hbar\omega f(n)$$

Принцип соответствия

$$\frac{1}{\hbar}\left(E_n - E_{n-\Delta n}\right) \approx \frac{1}{\hbar}\frac{dE_n}{dn}\,\Delta n = \omega\,\Delta n \qquad \frac{dE_n}{dn} = \hbar\omega$$

Дифференциальное уравнение

$$-\frac{d(\omega f)}{dn} = \omega\,, \qquad -\frac{d\omega}{dE}\frac{dE}{dn} f - \omega\frac{df}{dn} = \omega\,, \qquad -\hbar\frac{d\omega}{dE} f - f' = 1\,, \qquad -f' + \frac{3}{3}\frac{\omega}{E} f = 1\,, \qquad f' = \frac{1}{2}$$

Решение

$$f(n) = \frac{n}{2}$$

Константа интегрирования = 0 — формула Бальмера

$$E = -\frac{\hbar\omega n}{2} = -\frac{(-2E)^{3/2}}{m^{1/2}e^2}\frac{\hbar n}{2}\,, \qquad -2E = \frac{(-2E)^{3/2}}{m^{1/2}e^2}\hbar n\,, \qquad (-2E)^{1/2} = \frac{m^{1/2}e^2}{\hbar n}$$
$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Спектральные линии

$$\omega_{nn'} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad R = \frac{me^4}{2\hbar^3}$$

Момент импульса

$$M = m\omega r^2 = m^{1/3}e^{4/3}\omega^{-1/3} = m^{1/2}e^2(-2E)^{-1/2} = \hbar n$$

Радиус

$$r = m^{-1/3}e^{2/3}\omega^{-2/3} = \frac{e^2}{-2E} = r_B n^2 \qquad r_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

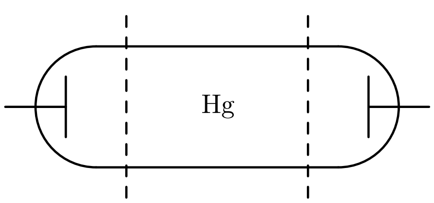
- $n' = 1$ Лайман (1906) УФ
- $n' = 2$ Бальмер (1885) 4 видимых; предсказал 5-ю (ближний УФ) — открыл Ангстрем
- $n' = 3$ Пашен (1908) ИК; предсказал Ритц из комбинационного принципа
- Пикеринг $n' = 2$; $n = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$
- Фаулер $n' = \frac{3}{2}$; $n = 2, 3, \ldots$

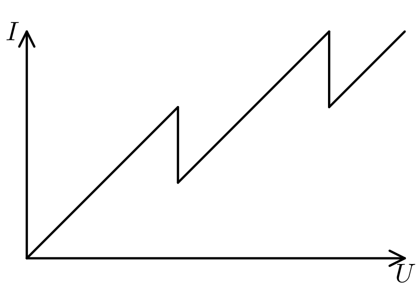
Бор: это ион гелия, $R_{\mathrm{He}} = 4R_{\mathrm{H}}$, n и n в 2 раза больше
Маленькие отклонения
Бор: приведённая масса

$$\frac{R_{\mathrm{He}}}{R_{\mathrm{H}}} = 4\frac{1 + \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{4M}}$$

Резерфорд: Как электрон решает, где ему остановиться?
Бор: Это аналогично branching ratio.

Опыт Франка–Герца (1914)





Комптон (1922) — излучение линии ртути

Эйнштейн: спонтанное и вынужденное излучение (1916)

2

1

$$\frac{dE_{\text{изл}}}{dt} = (A_{12} + B_{12}w)\, n_2 \qquad \frac{dE_{\text{погл}}}{dt} = B_{21} w n_1$$

Равновесие

$$(A_{12} + B_{12}w)\, e^{-E_2/T} = B_{21} w e^{-E_1/T}$$

$T \to \infty$: $w \to \infty \Rightarrow B_{12} = B_{21}$

$$A_{12} = B_{12} w \left(e^{\hbar\omega/T} - 1\right) \qquad w = \frac{A_{12}}{B_{12}} \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

$\omega \to 0$: Рэлей–Джинс

$$\frac{A_{12}}{B_{12}} \frac{T}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2 T}{\pi^2 c^3} \qquad \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \qquad w = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

Эффект Комптона (1921)

Пауль Эренфест

1880 Вена
еврейская семья, бакалейная лавка в рабочем районе, младший из 5 сыновей
гимназия

1899 Венский университет: Больцман, Хазенёрль

1901 Гёттинген: Гильберт, Клейн
Татьяна Афанасьева

1903 Вена

1904 диссертация по механике
женился на Татьяне (официально стали атеистами)
дочь Таня штрих

1907 Петербург (до 1912)
чиновник: на каком кладбище хоронить?
дружба с Иоффе
борьба за упрощение магистерских экзаменов по математике
домашние семинары
только временные курсы по математической физике

1912 Поиски работы: Львов, Лейпциг, Вена, Берлин, Мюнхен, Прага (Эйнштейн). Чтобы занять место Эйнштейна (который уезжал в Цюрих) в Праге, необходимо было (формально) принять какую-нибудь религию; Эренфест отказался. Обзор по статистической механике. Письма Лоренца. Профессор в Лейдене, лекция по теории относительности. Лекции, выделял ключевые моменты: Вот тут-то лягушка и прыгает в воду. Упрощённые модели — самая суть вопроса без лишних усложнений. Собаче–блошиная модель. Семинар: Крамерс, Бюргерс, Ферми.

1914 Дом, гостевая комната, подписи.

Распределение Планка из осцилляторов поля (1906).

Адиабатическая инвариантность $E/\omega \Rightarrow$ закон смещения Вина; красное условие и фиолетовое условие; весовая функция от E/ω — дискретные вклады, 0 (или быстро убывает) в некотором интервале после наименшей дискретной точки (1911).

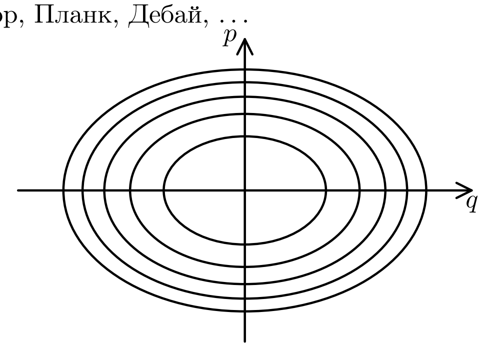
Адиабатический принцип

Теплоёмкость двухатомных газов (1913) — квантование момента импульса. Адиабатическая инвариантность $<T>/\omega$. Диполь в электрическом поле — медленно выключаем (на самом деле здесь адиабатическая инвариантность неприменима). Потом исправил правильное $M = \hbar n$ на неправильное $M = n\hbar/2$.

Адиабатическая гипотеза (1916)

Квантование: 1 степень свободы

Бор, Планк, Дебай, …



$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint p\dot{q}\,dt = \frac{2\overline{E}_k T}{2\pi} = 2\frac{\overline{E}_k}{\omega}$$
$$\frac{dI}{dE} = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dp}{dE}dq = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\omega} \qquad \frac{dE}{dI} = \omega$$
$$I = \hbar n \qquad \frac{dE}{dn} = \hbar\omega$$

принцип соответствия. Осциллятор

$I = 2\frac{\overline{E}_k}{\omega} = \frac{E}{\omega}$

$2\pi I = \pi q_0 p_0 \qquad \frac{p_0^2}{2m} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} = E \qquad q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad p_0 = \sqrt{2mE} \qquad I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}\,2mE} = \frac{E}{\omega}$

Действие

$$S(q,E) = \int p(q,E)\,dq$$

Выразим через I: $S(q,I)$. Каноническое преобразование

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \qquad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

Гамильтониан

$$H = E(I)$$

не зависит от φ. Уравнения Гамильтона

$$\dot{I} = 0 \qquad \dot{\varphi} = \frac{dE}{dI}$$

Решение

$$I = \mathrm{const} \qquad \varphi = \omega(I)t \quad \text{где} \quad \omega(I) = \frac{dE(I)}{dI}$$

За период $\Delta\varphi = 2\pi$, $\Delta S = 2\pi I$. Любая физическая величина (q, p и т. д.) — периодическая функция φ с периодом 2π. Для осциллятора $H = \omega I$.

Квантование: несколько степеней свободы

Если в некоторых координатах возможно полное разделение переменных в методе Гамильтона–Якоби

$$S = \sum_i S_i(q_i) \qquad p_i = \frac{dS_i}{dq_i} \qquad S_i = \int p_i\, dq_i$$

При изменении q_i от min до max и обратно

$$\Delta S_i = 2\pi I_i \qquad I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i\, dq_i$$

Каноническое преобразование, производящая функция $S(q_i, I_i)$

$$\begin{aligned}
&\varphi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i} \\
&\dot{I}_i = 0 \qquad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} \\
&I_i = \text{conts} \qquad \varphi_i = \omega_i t \quad \omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}
\end{aligned}$$

Физические величины — ряды Фурье с частотами $\sum_i n_i \omega_i$.

Адиабатический инвариант Эренфеста — это $\sum_i I_i$. Бюргерс (студент Эренфеста) по его поручению доказал, что в условно-периодических системах I_i адиабатически инвариантны по отдельности. Так что правила квантования согласуются с адиабатическим принципом.

Уравнение Гамильтона–Якоби в сферических координатах

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + U(r) = E$$

Разделение переменных

$$\begin{gathered}
S = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\varphi(\varphi) \\
\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} = p_\varphi \qquad p_\varphi = M_z \\
\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\vartheta} = M^2 \\
\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2} = 2m\left[E - U(r)\right]
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
I_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi\, d\varphi = p_\varphi \\
I_\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{M^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \\
I_r &= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]}\, dr
\end{aligned}$$

Сравним с плоскими полярными координатами с осью вдоль $\vec{M}$:

$$dS = p_r\, dr + p_\vartheta\, d\vartheta + p_\varphi\, d\varphi = p_r\, dr + p_\psi\, d\psi \qquad p_\psi = M$$

$$\begin{aligned}
I_\varphi &= \hbar n_\varphi = \hbar m \\
I_\vartheta &= \hbar n_\vartheta = \hbar(l - m) \\
I_r &= \hbar n_r
\end{aligned}$$